mathématiques

Collection M. Monge



Maurice Monge
Ancien élève de l'École Normale Supérieure,
Agrégé de l'Université.

Marie-Claude Audouin
Ancienne élève de l'École Normale Supérieure,
Agrégée de l'Université.

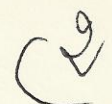
Suzanne Hautcœur
Agrégée de l'Université.

⊂	⊃	$\mathbb{D}$	$\mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	∈	$\mathbb{Q}$	⊥
∪	∩	×	$\mathbb{Z}$
∞	$\mathbb{C}$	∧	∨

Couverture :
symboles mathématiques,
grille de photocomposeuse Linotron 505
de la Société Clipet de Composition Moderne.
Image produite par caméra vidéo
et photographiée sur écran TV.
Photographe Francis Azémard.
Dessins de F. Walczak.



8, rue Férou - 75278 Paris Cedex 06



Préface

Après une classe de Seconde indifférenciée, les élèves qui optent pour des études à dominante scientifique vont se trouver dans une section unique, la 1re S, à laquelle la 1re E se rattache aisément.
Pour traiter le programme de 1re S, nous n'avons jamais oublié que les élèves de 1re S auront à opter soit pour la Terminale C, soit pour la Terminale D.
C'est en pensant aux futurs élèves de C que nous avons conduit avec rigueur les démonstrations des théorèmes (lorsqu'un résultat est admis, nous l'indiquons clairement).
C'est en pensant aux futurs élèves de D que nous avons associé à chaque démarche théorique de nombreux exemples et exercices d'application.

Révision des acquis.
- Certaines questions du programme de 1re S (second degré, lignes de niveau de : $M \longmapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$) ont été traitées à titre de thèmes dans notre livre de Seconde. (Nous ignorions les programmes de 1re.) Certains collègues n'ont peut être pas traité en Seconde de tels thèmes d'étude; il nous a paru indispensable de reprendre ces questions dans le présent livre.
- Comme dans les précédents manuels, nous avons évité de regrouper en tête quelques pages de « révisions ». Une accumulation de rappels en début d'année scolaire provoque chez les élèves un effet de lassitude, une impression de piétinement, et, même si c'est parfois inexact, une impression de déjà su.

Lorsque viendra le moment d'utiliser effectivement ces rappels, élèves et professeurs se trouveront devant le même obstacle. Nous faisons donc le rappel des notions acquises à chaque endroit où nous devons les utiliser.

Notations AFNOR.
Nous avons adopté, en 1re S/E, tout comme dans le livre de 1re A_1/B les symboles définis par la norme NF-X-02-101, homologuée par arrêté du 1981-09-11, prenant effet le 1981-10-11 qui annule et remplace la norme de même indice homologuée le 31 octobre 1961.
En pratique, pour ce manuel de 1re S/E, cela se traduit par l'adoption du symbole $\approx$, et des notations tan x, $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
La notation : $a \approx b$ signifie que a est approximativement égal à b.
La notation tan x signifie tangente trigonométrique de x, et se substitue à la notation tg x; la notation tan est d'ailleurs en usage sur la plupart des calculatrices.
Pour noter les repères cartésiens du plan ou de l'espace, on introduit un point-virgule après la lettre qui désigne le sommet du repère.
Signalons aussi, bien que ces notations n'interviennent pas dans le livre de 1re S/E, les notations lg pour logarithme décimal, ln pour logarithme népérien. Les symboles log, Log et L ne doivent plus être utilisés.

Découpage du livre.
Nous avons essayé de faciliter la tâche de nos collègues en équilibrant selon les indications du programme les temps respectivement impartis à l'Analyse, aux Statistiques, à la Géométrie. Nous soulignons toutefois que cette répartition ne peut se traduire par la proportionnalité du nombre des pages.

Analyse.
Certains points du programme d'analyse sont « classiques » et la rédaction ne pose pas de problème d'interprétation.
Pour d'autres, les choix sont moins évidents, surtout si l'on veut éviter tout dépassement de programme et toute surenchère de langage.
Par exemple, après une étude assez complète des suites convergentes, n'est-il pas indispensable de mentionner l'existence des suites divergentes et de donner, au moins de façon sommaire, un critère de divergence.

Le programme et les commentaires qui l'accompagnent fixent impérativement la définition de la limite nulle d'une fonction au point 0. Nous vous renvoyons à la définition de la page 105 où la condition $|x| < \alpha$ remplace désormais la condition : $0 < |x| < \alpha$.
Il en résulte que, **si une fonction est définie en un point x_0, elle n'a de limite en ce point que si elle est continue en x_0.**

Nous avons effleuré le problème des limites infinies et des comportements asymptotiques, mais, conformément aux commentaires nous n'avons fait aucun exposé.
De même, nous avons introduit, sans nous appesantir les définitions des développements limités d'ordre 0 et d'ordre 1.

Statistiques.
Dans le chapitre consacré aux statistiques, nous avons souvent utilisé les mêmes tableaux de données que dans le livre de 1re A_1B.
C'est le seul point qui soit commun aux deux livres.

Géométrie.
Nous avons supposé acquises un certain nombre de connaissances qui figurent dans le programme de Seconde et que nous avons exposées avec soin, en particulier la notion d'angles.

Nous avons apporté beaucoup d'attention au chapitre des isométries, en particulier à l'étude de l'ensemble des isométries du plan qui admettent au moins un point invariant. Nous avons clairement démontré (en vue de la classe de Terminale C) l'existence d'une partition de cet ensemble : l'ensemble des symétries orthogonales et l'ensemble des composées de deux symétries orthogonales d'axes concourants.
Ce n'est qu'après avoir établi cette partition que nous faisons le lien entre le deuxième ensemble et l'ensemble des rotations du plan.

Pour l'orientation de l'espace et l'étude du produit vectoriel, nous avons été très concrets, et nous avons adopté un point de vue très « physique ». N'oublions pas que nos collègues physiciens doivent utiliser ces notions dès le début de la classe de Terminale.

Enfin, dans le chapitre sur la représentation des polyèdres, nous avons évité de faire un cours de Géométrie Descriptive.
Toutefois, étant donnée la nature des problèmes à traiter, il est des questions de vocabulaire que nous n'avons pu ignorer.

Nous espérons que ce livre sera pour nos collègues et pour leurs élèves un instrument de travail sympathique et efficace. Nous accueillerons volontiers les remarques et les suggestions qui nous permettront de l'améliorer.

Les Auteurs.

C3

Programme

• L'horaire hebdomadaire de la classe est de 6 heures.

• Des questions qui figurent dans diverses rubriques du programme étant destinées à s'interpénétrer, le professeur adoptera la répartition qui lui convient des différentes parties, en les scindant ou les menant de front. Il lui est demandé de ne sacrifier aucune rubrique, et il est précisé que l'équilibre du programme a été conçu sur la base de la moitié de l'horaire consacrée à l'analyse, d'une dizaine d'heures réservées aux statistiques, le reste allant à la géométrie.

• Comme en Seconde, les calculatrices seront largement utilisées.
Le choix des thèmes d'activités permettra de tenir compte des centres d'intérêt et des possibilités des élèves; les listes proposées pour les thèmes ne sont ni impératives ni exhaustives.

• Dans tout le programme, la mention « on admettra » ou « énoncé admis » se rapporte à une proposition pour laquelle le professeur décidera de l'opportunité d'une démonstration, étant entendu que celle-ci ne sera pas exigible au baccalauréat mais qu'en tout état de cause la signification de l'énoncé, sa portée et ses applications seront mises en évidence.
Les autres propositions seront, bien entendu, démontrées.
La mention « exemples de » signifie qu'il n'y a pas lieu d'effectuer un exposé synthétique général ni de mettre en place un vocabulaire théorique général. Bien entendu il est essentiel que l'étude d'un exemple soit menée de façon solide et précise, et permette de dégager des idées et des méthodes.

I. SUITES NUMÉRIQUES

a) Exemples de suites définies par des procédés divers : valeurs d'une fonction, méthodes itératives faisant intervenir la différence ou le rapport de deux termes consécutifs.
Suites monotones. Suites périodiques.
Exemples de suites tendant vers l'infini; cas de la suite (na), $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $pa \leqslant x < (p+1)a$.

b) Suites arithmétiques. Suites géométriques.
Sur les exemples types $n \longmapsto n$, $n \longmapsto a^n$, on calculera les sommes de rang n, en vue d'applications numériques.

c) Convergence d'une suite vers 0 : définition; les suites qui convergent vers 0 sont bornées; stabilité de la convergence vers 0 pour l'addition et pour la multiplication par une suite bornée (énoncés admis).
Convergence d'une suite :[on dira que ℓ est limite de la suite (u_n) si $\lim(u_n - \ell) = 0$.[La limite d'une suite convergente de réels positifs est positive.
Justification d'une convergence vers 0 à l'aide d'une majoration; des exemples simples, tels que $|u_n| \leqslant \frac{k}{n}$, $|u_n| \leqslant \frac{k}{10^n}$, permettront d'apprécier la rapidité de diverses convergences.
— Exemples d'encadrements d'un nombre réel exprimant une mesure (aire, volume, ...).
— Exemples d'approximation (notamment par des suites adjacentes) d'un nombre réel solution d'une équation.
— Développements décimaux; un développement décimal périodique caractérise un rationnel.

II. FONCTIONS NUMÉRIQUES

• Les premiers éléments de l'étude d'une fonction (majorations, minorations, monotonie, sens de variation) ont été mis en place en Seconde; on fera ressortir toute l'importance de l'étude numérique et de la représentation graphique.
• On illustrera l'étude des propriétés qui vont suivre au moyen des fonctions déjà étudiées en Seconde, et d'exemples numériques de fonctions affines par morceaux, de fonctions polynômes ou encore de fonctions telles que $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ et $x \longmapsto \sqrt{ax+b}$.

a) Applications définies sur un intervalle; opérations sur ces applications. Notations $f \geqslant 0$, $f \geqslant g$; applications bornées.
Notion d'application bijective (liée à la discussion d'une équation $f(x) = y$, où x est l'inconnue).

b) Exemples d'étude conjointe de deux fonctions : l'une d'elles étant f, l'autre est par exemple :[$|f|$, λf, $x \longmapsto f(x-\lambda)$, $x \longmapsto f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.
Fonctions composées.

c) Limite d'une fonction en un point : on commencera par le cas de la limite 0 au point 0; on définira $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ par $\lim_{h \to 0} f(a+h) = 0$; on dira que ℓ est limite de la fonction f au point a si $\lim_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$; on admettra des énoncés analogues à ceux qui ont été cités en I **c.**
Continuité en un point (développement limité d'ordre zéro); continuité sur un intervalle. Toute étude systématique de la continuité est hors du programme.

d) Développement limité d'ordre un; nombre dérivé, interprétations cinématique (vitesse) et géométrique (tangente); fonction dérivable sur un intervalle.
Règles de dérivation de la somme, du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction (cette dernière règle pourra être admise).
Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$.

e) Applications des dérivées à l'étude du sens de variation d'une fonction, à la recherche d'extremums, à la résolution d'équations et inéquations. On s'appuiera sur les trois propositions suivantes, qu'à ce niveau il est hors de propos de démontrer :
— Si f est dérivable sur l'intervalle I et si sa dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
— Si f est dérivable sur I et si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
— Si f est dérivable sur $[a, b]$ $(a < b)$ et si f' est à valeurs strictement positives sur $]a, b[$, alors f établit une bijection strictement croissante de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
Primitives d'une fonction continue : on admettra qu'une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I, et on démontrera que chacune d'elles est déterminée par sa valeur en un point de I.
Cette notion de primitive permettra d'introduire la fonction logarithme népérien dès le début de la classe Terminale.

f) Étude des fonctions sinus et cosinus : périodicité, parité, dérivées et primitives, représentations graphiques.

Thèmes (à titre indicatif) :
— Problèmes simples d'optimisation se ramenant à la recherche d'extremums de fonctions d'une variable.
— Recherche de limites de suites ou de fonctions à l'aide de développements limités d'ordre un.

— Obtention de majorations et d'encadrements à l'aide du calcul différentiel. A titre d'exemple, la chaîne d'inégalités valables pour tout $x \geqslant 0$:

$\cos x \leqslant 1$; $\sin x \leqslant x$; $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$; etc.

— Calcul de valeurs approchées de fonctions.
— Exemples d'étude de mouvements rectilignes.
— Exemples d'étude de positions relatives de deux arcs de courbe.

III. FONCTIONS POLYNÔMES

a) Calcul sur les fonctions polynômes à une variable.
Factorisation par $x - a$.

b) Trinôme du second degré; technique de la forme canonique; application à la recherche du sens de variation, à la représentation graphique et à la résolution de l'équation du second degré; somme et produit des racines.

Thèmes (à titre indicatif).
— Exemples de décomposition d'un polynôme en produit de polynômes de degré 1 ou 2.
— Exemples de séparation et de calcul approché des zéros d'une fonction polynôme.
— Détermination d'une fonction polynôme par des valeurs données (problème de l'interpolation).
— Constitution et utilisation de tables de différences finies.

IV. STATISTIQUES

Étude de séries statistiques à une variable.
Fréquences, histogramme.
Éléments caractéristiques de description et d'analyse d'une série statistique : caractéristiques de position (médiane, moyenne); caractéristiques de dispersion (écart moyen, écart type).

Thème (à titre indicatif) :
— Le regroupement en classes; ses effets sur les caractères quantitatifs.

V. GÉOMÉTRIE PLANE

• Le professeur procèdera à un rappel rapide (sans démonstration) des propriétés des opérations sur les vecteurs du plan. En vue de faciliter la communication, il donnera la définition d'un espace vectoriel et d'une application linéaire, un premier exemple d'application linéaire étant la projection vectorielle.
Aucune théorie générale des espaces vectoriels et des applications linéaires n'est au programme; il n'y aura pas lieu de donner d'autres exemples d'espace vectoriel que les ensembles de vecteurs de la droite, du plan (§ V), de l'espace (§ VI).
• L'intuition géométrique sera développée par l'emploi fréquent de figures, concernant aussi bien les ensembles de vecteurs que les ensembles de points.

a) Colinéarité de deux vecteurs; vecteurs directeurs d'une droite. Bases; repères.

b) Exemples de transformations du plan, définies par des procédés variés.
Exemples de composition de transformations, de décomposition d'une transformation; exemples de groupes de transformations.

c) Groupe des isométries du plan conservant un point donné; décomposition d'une telle isométrie en un produit de symétries axiales; partition du groupe en deux classes; rotations.
Application linéaire associée à une isométrie admettant un point fixe.

d) Orientation du plan.

e) Applications du produit scalaire :
— Fonctions $M \longmapsto \alpha AM^2 + \beta BM^2$; théorème de la médiane.
— Formule $\cos(\beta - \alpha) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$; formules d'addition; formules de multiplication par 2.
— Relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

f) Autres relations métriques dans le triangle :
$S = \frac{1}{2} bc \sin A$: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Thèmes (à titre indicatif) :
— Problèmes d'alignement et de concours; rôle du calcul barycentrique dans ces problèmes.
— Problèmes de constructions : rôle des diverses méthodes (analyse des propriétés d'une configuration, recours à une transformation, emploi de l'outil algébrique, ...).
— Problèmes de lieux géométriques.
— Problèmes de trajets de longueur minimale et de trajets de durée minimale : billard, réflexion, réfraction, ...

VI. GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

a) Vecteurs de l'espace : extension de la définition et des opérations étudiées dans le plan.
Droite définie par un point et un vecteur; plan défini par un point et deux vecteurs.
Bases; repères.

b) Extension du produit scalaire à l'espace.
Orthogonalité de deux vecteurs; traduction vectorielle de l'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan.
Plans perpendiculaires : définition, caractérisation.
Projection orthogonale d'un angle droit.

c) Bases orthonormales; repères orthonormaux; expressions du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.
Fonction $M \longmapsto \vec{K} \cdot \overrightarrow{OM}$; équations cartésiennes d'un plan; distance d'un point à un plan.

d) Orientation de l'espace; bases orthonormales directes; repères orthonormaux directs.
Produit vectoriel [notations : $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$].
Produit mixte.
Coordonnées du produit vectoriel et expression du produit mixte dans une base orthonormale directe.

e) Sphère; section plane; plan tangent.

Thème obligatoire dans la section E, facultatif dans les autres :
— Représentation, à l'aide des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires, de polyèdres tels que tétraèdres réguliers, cubes, prismes, pyramides.
(Il n'est pas question de faire un cours de géométrie descriptive; en particulier l'usage de la ligne de terre et des traces d'un plan est sans intérêt; mais il est bon d'habituer les élèves à traiter par les techniques de l'épure des problèmes simples de constructions, en particulier ceux qui concernent l'intersection de deux plans, l'orthogonalité d'une droite et d'un plan).
Exemples de détermination de sections planes de polyèdres.

Autres thèmes (à titre indicatif) :
— Utilisation de transformations simples de l'espace, telles que translations et homothéties, pour la résolution de problèmes de constructions.
— Exemples de distance de deux parties de l'espace; problèmes simples d'équidistance.
— Repérage d'un point sur une sphère.

Table des matières

C 5